交通工程学

Introduction to Traffic Engineering

第 5 节　交通流理论

葛乾[1]

西南交通大学　交通工程系
西南交通大学　系统科学与系统工程研究所

[1]基于西南交通大学霍娅敏老师教学课件

开始之前

Figure: Cites: Skyline

开始之前

Figure: PTV Vissim

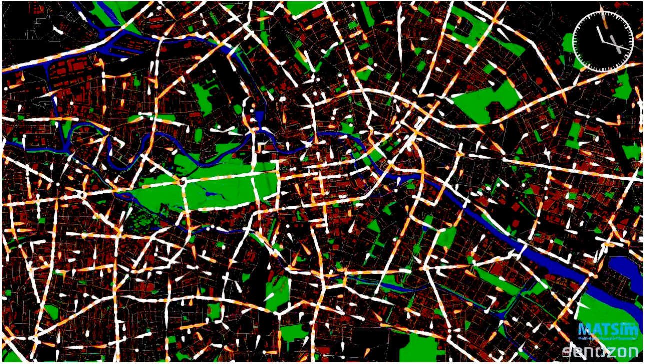


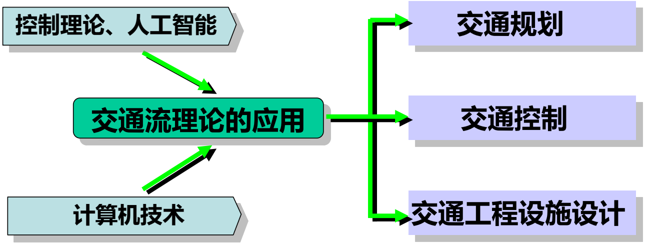
Figure: MATSim

本节目录

概述

- 运用数学和物理学的定理来描述交通流特性，以分析的方法阐述交通现象及其机理，探讨人和车在单独或成列运行中的动态规律及人流或车流流率、流速和密度之间的变化关系

与其他内容的关系



内容

- 微观方法：以个体为单位建模
  - 跟驰、换道、路径选择等模型
- 宏观方法：以群体为单位建模
  - LWR 模型、瓶颈模型等
- 中观方法：介于二者之间
  - 元胞自动机、动力学模型

学习内容

- 统计分布特征
- 排队特征
- 一种简单微观模型：跟驰模型
- 一种简单宏观模型：LWR 模型

本节目录

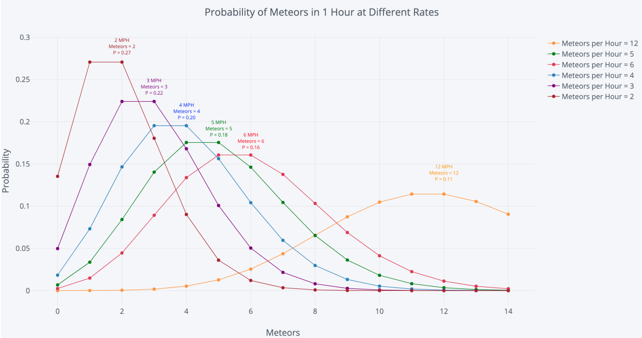
为什么需要统计分布

- 为设计新交通设施和确定新的交通管理方案提供交通流的某些具体特性的预测
- 利用现有的和假设的数据，作出预报

离散分布

- 在**一定时间间隔内到达的车辆数**，或在**一定的路段上分布的车辆数**，是所谓的随机变量，描述这类随机变量的统计规律用的是离散型分布。

离散分布–泊松分布



Probability of Meteors in 1 Hour at Different Rates
2 MPH
Meteors = 2
P = 0.27
3 MPH
Meteors = 3
P = 0.22
4 MPH
Meteors = 4
P = 0.20
5 MPH
Meteors = 5
P = 0.18
6 MPH
Meteors = 6
P = 0.16
12 MPH
Meteors = 12
P = 0.11
Probability
Meteors
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10
12
14
Meteors per Hour = 12
Meteors per Hour = 5
Meteors per Hour = 6
Meteors per Hour = 4
Meteors per Hour = 3
Meteors per Hour = 2

离散分布–泊松分布

- $$P(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

  式中 $P(k)$ 表示在计数间隔 t 内到达 k 辆车或 k 个人的概率；λ 表示单位时间间隔的平均到达率 (辆/s 或人/s)；t 表示每个计数间隔持续的时间 (s) 或距离 (m)，e 为自然对数的底，取值为 2.71828
- 若令 $m = \lambda t$ 为在计数间隔 t 内平均到达的车辆 (人) 数

$$P(k) = \frac{m^k e^{-m}}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

离散分布–泊松分布

- 到达数小于 k 辆车 (人) 的概率

$$P(< k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{m^i e^{-m}}{i!}$$

- 到达数小于等于 k 的概率

$$P(\leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{m^i e^{-m}}{i!}$$

- 到达数大于等于 k 的概率

$$P(\geqslant k) = 1 - P(< k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{m^i e^{-m}}{i!}$$

- 到达数至少是 x 但不超过 y 的概率

$$P(x \leqslant i \leqslant y) = \sum_{i=x}^{y} \frac{m^i e^{-m}}{i!}$$

离散分布–泊松分布

- 参数的获取

$$m = \frac{观察的车辆数}{总计间隔数} = \frac{\sum_{j=1}^{g} k_j f_j}{\sum_{j=1}^{g} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{g} k_j f_j}{N}$$

式中 g 表示观测数据分组数；f_j 表示计算间隔 t 内到达 k_j 辆车 (人) 这一事件发生的次 (频) 数；k_j 表示计数间隔 t 内的到达数或各组的中值；N 表示观测的总计间隔数

- 递推公式

$$P(0) = e^{-m}$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(k+1) = \frac{m}{k+1} P(k)$$

离散分布–泊松分布

- 应用条件
  - 车流密度不大，车辆间相互影响微弱，其他外界干扰因素基本上不存在，即车流是随机的，此时应用泊松分布能较好地拟合观测数据
  - 泊松分布的均值 M 和方差 D 均等于 λt，而观测数据的均值 m 和方差 S^2 均为无偏估计，因此，当观测数据表明 $\frac{S^2}{m}$ 显著地不等于 1.0 时，泊松分布不再合适

离散分布–泊松分布例子

问题

有 60 辆车随机分布在 5km 长的道路上，对其中任意 500m 长的一段，试求：1. 有 4 辆车的概率；2. 有大于 4 辆车的概率。

解答

Q 辆车独立而随机的分布在一条道路上，若将这条道路均分为 Z 段，则一段中包括的平均车数 m 为 $m=\frac{Q}{Z}$，在本例中 $Q=60, Z=5000/500=10$，所以：
$m=60/10=6$

1. 有 4 辆车的概率：$p(4)=\frac{6^4e^{-6}}{4!}=0.1350$
2. 有大于 4 辆车的概率：

$$\begin{aligned}p(>4)&=1-\sum_{i=0}^{4}\frac{6^ie^{-6}}{i!}\\&=1-0.0025-0.0150-0.0450-0.0900-0.1350=0.7125\end{aligned}$$

离散分布–泊松分布例子

问题

某信号交叉口的周期为 $c = 97s$，有效绿灯时间为 $g = 44s$。有效绿灯时间内排队的车流以 $v = 900$ 辆 $/h$ 的流率通过交叉口，在绿灯时间外到达的车辆需要排队。设车流的到达率 $q = 369$ 辆 $/h$, 且服从泊松分布，求到达车辆不致于两次排队的周期数占周期总数的最大百分比。

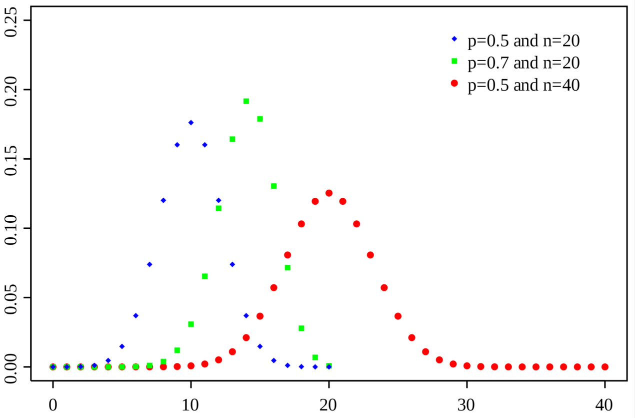
解答

由于车流只能在有效绿灯时间通过，所以一个周期能通过的最大车辆数 $A = vg = 900 \times 44/3600 = 11$ 辆，如果某周期到达的车辆数 N 大于 11 辆，则最后到达的 $N - 11$ 辆车要发生二次排队。泊松分布中一个周期内平均到达的车辆数:

$$m = \lambda t = qc = \frac{369 \times 97}{3600} = 9.9$$

查波松分布表可得到达车辆数大于 11 辆的周期出现的概率：$P(> 11) = 0.29$
因此，不发生两次排队的周期的出现的概率为 $1 - P(> 11) = 0.71$

离散分布–二项分布



p=0.5 and n=20
p=0.7 and n=20
p=0.5 and n=40
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
10
20
30
40

离散分布–二项分布

◇ 基本公式

$$P(k)=C_n^k(\frac{\lambda t}{n})^k(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n$$

式中 $P(k)$ 表示在计数间隔 t 内到达 k 辆车或 k 个人的概率；λ 表示单位时间间隔的平均到达率 (辆/s 或人/s)；t 表示每个计数间隔持续的时间 (s) 或距离 (m)；n 表示正整数

◇ 通常记 $p=\lambda t/n$，则二项分布可写成

$$P(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n$$

离散分布–二项分布

- 基本公式：在计数间隔 t 内到达数小于 k 辆车 (人) 的概率

$$P(<k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p^k (1-p)^{n-i}$$

- 到达数大于等于 k 的概率

$$P(>k) = 1 - P(\leqslant k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^k (1-p)^{n-i}$$

- 对于二项分布，其均值 $M = np$，方差 $D = np(1-p)$，$M > D$。因此，当用二项分布拟合观测数时，根据参数 p、n 与方差和均值的关系式，用样本的均值 m、方差 S^2 代替 M、D，p、n 可按下列关系式估算

$$P = \frac{m - S^2}{m}$$

$$n - \frac{m}{p} = \frac{m^2}{m - S^2} \quad (\text{取整数})$$

离散分布–二项分布

- 递推公式:

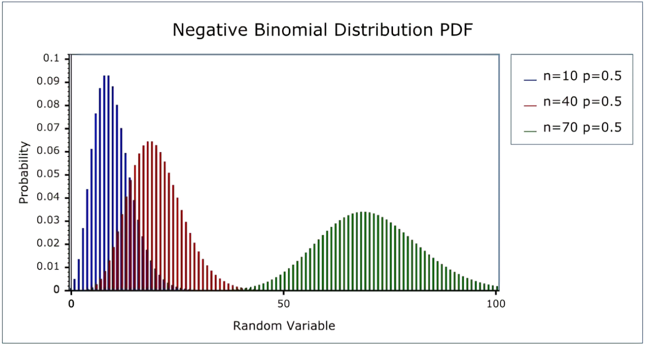
$$P(0) = (1-p)^n$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(k+1) = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}P(k)$$

- 应用条件：车流比较拥挤、自由行驶机会不多的车流用二项分布拟合较好。此外，我们已经知道二项分布均值 M 大于方差 D，当观测数据表明 S^2/m 显著大于 1.0 时就是二项分布不适的表示。

离散分布–负二项分布


Negative Binomial Distribution PDF
Probability
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
50
100
Random Variable
n=10 p=0.5
n=40 p=0.5
n=70 p=0.5

离散分布–负二项分布

- 计算在计数间隔 t 内到达 k 辆车 (或人) 的概率，基本公式：

$$P(k) = C_{k+\beta-1}^{\beta-1} p^{\beta}(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

  式中 p, β 为负二项分布参数。$0 < p < 1$, β 为正整数，其余符号意义同前

- 到达数大于 k 的概率可由下式计算

$$P(> k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} C_{k+\beta-1}^{\beta-1} p^{\beta}(1-p)^i$$

离散分布–负二项分布

- 由概率论可知，对于负二项分布，其均值 $M = \beta(1-p)/p$，$D = \beta(1-p)/p2$，$M < D$。因此，当用负二项分布拟合观测数据时，利用 p、β 与均值和方差的关系式，用样本的均值 m、方差 S^2 代替 M、D。p、β 可由下列关系式估算：

$$p = \frac{m}{S^2}$$

$$\beta = \frac{m^2}{S^2 - m} \quad (\text{取整数})$$

离散分布–负二项分布

- 递推公式:

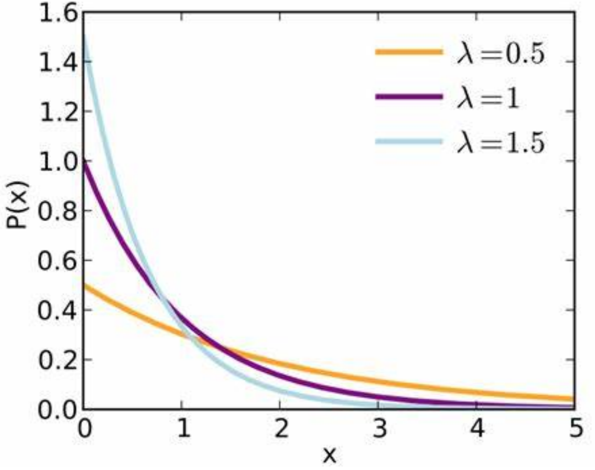
$$
\begin{aligned}
P(0) &= p^{\beta} \\
&\cdots\cdots \\
P(k) &= \frac{k+\beta-1}{k}(1-p)P(k-1)
\end{aligned}
$$

- 应用条件：当到达的车流波动性很大或以一定的计算间隔观测到达的车辆数 (人数)，其间隔长度一直延续到高峰期间与非高峰期间两个时段时，所得数据可能有较大的方差，即 S2/m 显著地大于 1.0，此时应使用负二项分布拟合观测数据

连续分布

- 连续型分布指的是车头时距分布

连续分布–负指数分布



连续分布–负指数分布

- 若车辆到达服从泊松分布，则车头时距服从负指数分布
- 在计数间隔 t 没有车辆达到的概率为

$$P(0) = e^{-\lambda t}$$

- $P(0)$ 也是车头时距等于或者大于 t 的概率

$$P(h \geqslant t) = e^{-\lambda t}$$

- 车头时距小于 t 的概率

$$P(h < t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

、

连续分布–负指数分布

- 若 Q 表示每小时的交通量，则 $\lambda = \frac{Q}{3600}$ 辆/s

$$P(h \geqslant t) = e^{-Qt/3600}$$

- 若令 M 为负指数分布的均值，D 为方差

$$M = \frac{3600}{Q} = \frac{1}{\lambda}$$
$$D = \frac{1}{\lambda^2}$$

用样本的均值 m、方差 S2 代替 M、D，即可算出负指数分布的参数 λ

连续分布–负指数分布

- 负指数分布的概率密度函数为

$$P(t) = \frac{d}{dt}P(h < t) = \frac{d}{dt}[1 - P(h \geqslant t)] = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$P(h \geqslant t) = \int_t^{\infty} p(t)dt = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t}$$

$$P(h < t) = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda t}$$

连续分布–移位负指数分布

- 适用条件: 负指数分布适用于车辆到达是随机的、有充分超车机会的单列车流和密度不大的多列车流的情况。通常认为当每小时每车道的不间断交通量等于或小于 500 辆时，用负指数分布描述车头时距是符合实际的
- 局限: 负指数分布的概率密度函数曲线是随车头时距 t 单调递降的，这说明车头时距愈短，其出现概率愈大。这种情形在不能超车的单列车流中是不可能出现的，因为车辆的车头之间至少应为一个车身长，所在车头时距必有一个大于零的最小值 τ

连续分布–移位负指数分布

- 基本公式：为克服负指数分布的车头时距愈趋近零其频率出现愈大这一缺点，可将负指数分布曲线从原点 O 沿 t 轴向右移一个最小间隔长度 τ，得到移位负指数分布曲线
- 移位负指数分布的分布函数

$$P(h \geqslant t) = e^{-\lambda(t-\tau)}, \ t \geqslant \tau$$

$$P(h < t) = 1 - e^{-\lambda(t-\tau)}, \ t \geqslant \tau$$

连续分布–移位负指数分布

- 负指数分布的概率密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \lambda' e^{-\lambda'(t-\tau)} & t \geqslant \tau \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases}$$

式中 $\lambda' = \frac{1}{\bar{t}-\tau}$，$\bar{t}$ 为平均车头时距

- 若令 M 分布的均值，D 为方差

$$M = \frac{1}{\lambda'} + \tau$$

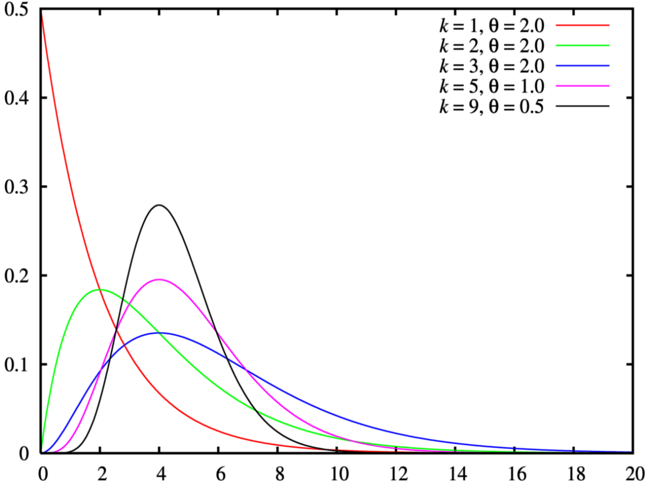
$$D = \frac{1}{\lambda'^2}$$

用样本的均值 m、方差 S2 代替 M、D，即可算出负指数分布的参数 λ 和 τ

连续分布–移位负指数分布

- 适用条件：移位负指数分布适用于描述不能超车的单列车流的车头时距分布和车流率低的车流的车头时距分布。
- 局限：移位负指数分布的概率密度函数曲线是随 $t-\tau$ 单调递降的，也就是说，服从移位负指数分布的车头时距，愈接近 τ，其出现的可能性愈大，这在一般情况下是不符合驾驶员的心理习惯和行车特点的。为了克服移位负指数分布的这种局限性，可采用更通用的连续型分布，如爱尔朗 (Erlang) 分布、韦布尔 (Weibull) 分布、皮尔逊 *III* 型分布等

连续分布–埃尔朗 (Erlang) 分布



连续分布–埃尔朗 (Erlang) 分布

- 基本公式:

$$P(h \geqslant t) = \sum_{i=0}^{l-1} (\lambda l t)^i \frac{e^{-\lambda l t}}{i!}$$

- 当 $l = 1$ 时，上式简化成负指数分布；当 $l = \infty$ 上式将产生均一的车头时距参数 l 可以反映畅行车流和拥挤车流之间的各种车流条件；l 越大，说明车流越拥挤，驾驶员自由行车越困难
- l 值可由观测数据的均值 m 和方差 S^2 用下式估算

$$l = \frac{m^2}{S^2}$$

- 爱尔朗分布的概率函数

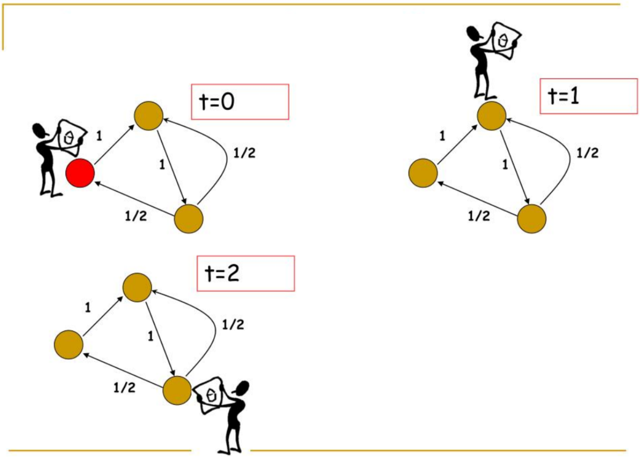
$$P(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{l-1}}{(l-1)!}, l = 1, 2, 3, \ldots$$

本节目录

随机过程

- 单个随机变量 → 随机分布
- 一系列彼此关联的随机变量 → 随机过程

我们想知道一个随机过程“稳定”下来如何运转


t=0
1
1
1/2
1/2
t=1
1
1
1/2
1/2
t=2
1
1
1/2
1/2

排队过程

- 排队论也称随机服务系统理论，是运筹学的重要内容之一。主要研究“服务”与“需求”关系的一种以概率论为基础的数学理论
- 两个随机事件: 服务，需求
  - 排队: 单指等待服务的顾客 (车辆或行人)，不包括正在被服务的顾客
  - 排队系统: 既包括了等待服务的顾客，又包括了正在被服务的顾客

基本原理

输 入

排 队 论

输 出

输入过程	排队规则	服务机构
■各种类型的顾客，按怎样的规律到来，主要有定长输入、泊松输入、爱尔朗输入	■到来的“顾客”按怎样的规定次序接受服务，主要有3种制式损失制、等待制、混合制	■同一时刻有多少服务设施可以接纳顾客，为每一顾客服务了多少时间，服务时间为定长分布、负指数分布、爱尔朗分布 

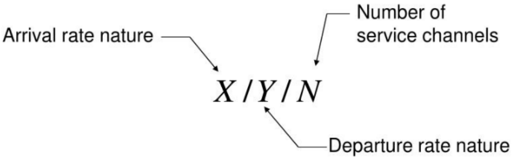
主要数量指标

- 等待时间 d：从顾客到达时起到他开始接受服务时止这段时间
- 忙期 $\frac{1}{\mu}$：服务台连续繁忙的时期，这直接关系到服务台的工作强度
- 队长 q：有排队等待服务的顾客数与排队系统中顾客数之分

到达和驶离

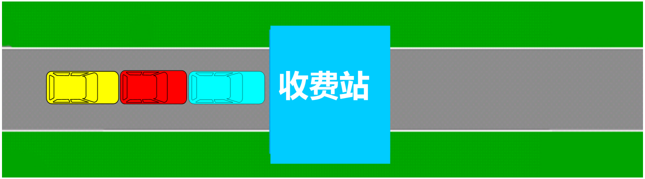
- 假设到达率为 λ，可假设两辆车之间的到达时间为 (a) 相同时间；或者 (b)（负）指数分布
- 假设驶离率为 μ，可假设两辆车之间的驶离时间为 (a) 相同时间；或者 (b)（负）指数分布
- 另一个假设：先进先出

表示

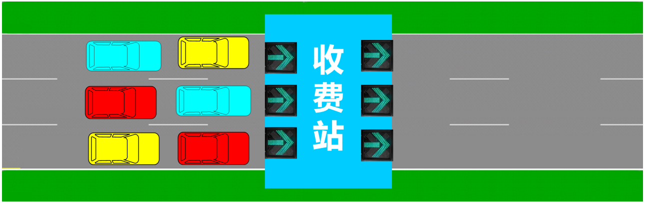


- 常用的排队过程：D/D/1；M/D/1；M/M/1；M/M/N
- D 表示确定性分布；M 表示某种随机分布（常用的为指数分布）

例子



例子



一个 M/M/1 排队过程的例子

Under standard M/M/1 assumptions, it can be shown that the following queuing performance equations apply (assuming that $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ is less than 1):

$$\bar{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\bar{w} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

where

$\bar{Q}$ = average length of queue in vehicles,
$\bar{w}$ = average waiting time in the queue, in unit time per vehicle,
$\bar{t}$ = average time spent in the system ($\bar{w} + 1/\mu$), in unit time per vehicle, and
other terms are as defined previously.

一个 M/M/1 排队过程的例子

问题

有一停车场，到达车辆是 60 辆/h，服从泊松分布，停车场的服务能力是 100 辆/h，服从负指数分布，其单一的出入道可存 6 辆车，试问该数量是否合适?

解答

这是一个 M/M/1 排队系统，$\lambda = 60, \mu = 100, \rho = \frac{60}{100} = 0.6$，系统稳定。队列中的平均车辆数为 $\bar{Q} = \frac{0.6^2}{1-0.6} = 0.9 < 6$. 因出入道存车量为 6 辆，如果存车量超过 6 辆的概率 $P(>6)$ 很小 (一般认为小于 5%)，则为合适。反之，则为不合适。

$$
\begin{aligned}
P(0) &= 1-\rho = 1-0.6 = 0.4 & P(1) &= \rho(1-\rho) = 0.6 \times 0.4 = 0.24 \\
P(2) &= 0.6 \times 0.4 = 0.14 & P(3) &= 0.6^3 \times 0.4 = 0.09 \\
P(4) &= 0.6^4 \times 0.4 = 0.05 & P(5) &= 0.6^5 \times 0.4 = 0.03 \\
P(6) &= 0.6^6 \times 0.4 = 0.02 & &
\end{aligned}
$$

$P(>6) = 1 - P(<6) = 1 - \sum_{n=0}^{6} P(n) = 1 - 0.97 = 0.03$. 计算结果表明，排队车辆数超过 6 辆的可能性极小, 故可认为该出入道的存车量是合适的。因此出入道的存车量是合适

本节目录

简介

- 原理：跟驰理论是运用动力学方法，探究在无法超车的单一车道上车辆列队行驶时，用数学理论描述后车跟随前车的行驶状态。
- 发展
  - 1950 年鲁契尔与 1953 年派普斯奠定基础；
  - 1960 年赫尔曼与罗瑟瑞进一步扩充；
  - 1961 年伽塞斯提出了一般化的跟驰模型。
- 适用范围：非自由行驶状态下车队的特性：密度高、车间距离不大，车队中后一辆车的车速都受前车速度的制约，司机只能按照前车所提供的信息采用相应的车速。
- 目的：试图通过观察各个车辆逐一跟驰的方式来了解单车道交通流的特性

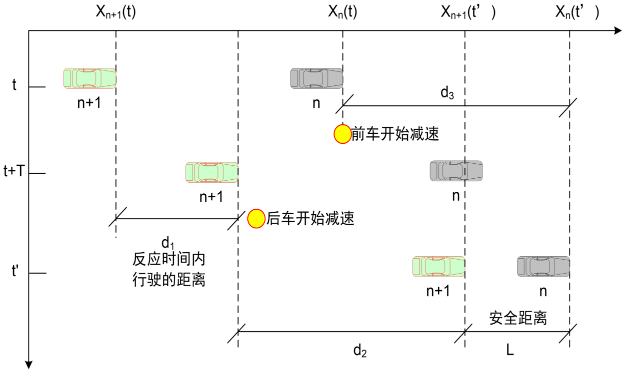
车队跟车特性分析

- **制约性**: 前车车速制约着后车车速和两车间距
  - 紧随要求：司机不愿落后很多，而是紧跟前车前进
  - 车速条件：后车速度不能长时间大于前车的速度，否则会追尾
  - 间距条件：前后车之间必须保持一个安全距离
- **延迟性**: 前车运行状态改变之后，后车也要相应作出改变，但是这种改变不是同步的。有一个反应时间的延迟。
- **传递性**: 第 1 辆车的状态改变 → 第 2 辆车状态改变 → 第 3 辆车改变由于延迟性的存在，这种传递不是平滑连续的，而是脉冲一样间断连续的

线性跟驰模型

- 跟驰模型是一种刺激—反应的表达式。
- 刺激：指驾驶员前方导引车的加速或减速，以及随之而发生的这两车之间的速度差和车间距离的变化；
- 反应：指驾驶员为了紧密而安全地跟踪前车的加速或减速动作及其实际效果。

线性跟驰模型



$X_{n+1}(t)$
$X_n(t)$
$X_{n+1}(t')$
$X_n(t')$
t
t+T
t'
n+1
n
d_3
前车开始减速
n+1
n
后车开始减速
d_1
反应时间内
行驶的距离
n+1
n
安全距离
d_2
L

线性跟驰模型

- 两车不发生碰撞的条件：$L \geqslant L_0$ (L_0= 安全距离 + 车身长度)
- 取极限

$$L = L_0$$
$$L = x_n(t') - x_{n+1}(t')$$
$$x_n(t') = x_n(t) + d_3$$
$$x_{n+1}(t') = x_{n+1}(t) + d_1 + d_2$$
$$[x_n(t) + d_3] - [x_{n+1}(t) + d_1 + d_2] = L_0$$

- 假设：后车在反应时间保持车速不变，于是

$$d_1 = T\dot{x}_{n+1}(t) = T\dot{x}_{n+1}(t+T)$$

- 假设：前车与后车在减速期间行驶的距离相同，于是

$$d_2 = d_3,\ x_n(t) - x_{n+1}(t) = d_1 + L_0$$
$$x_n(t) - x_{n+1}(t) = T\dot{x}_{n+1}(t+T) + L_0$$

$S(t)$——时间 t 时车辆间的车头间距；

$x_{n+1}(t)$——时间 t 时 $n+1$ 车的位置；

$x_n(t)$——时间 t 时 n 车的位置

d_1——反应时间 T 内 $n+1$ 车行驶的距离；

$\dot{x}_{n+1}(t)$——时间 t 时 $n+1$ 车的速度；

$\dot{x}_n(t)$——时间 t 时 n 车的速度；

$\ddot{x}_{n+1}(t)$——时间 t 时 $n+1$ 车的加速度；

$\ddot{x}_n(t)$——时间 t 时 n 车的加速度；

T——反应时间或称反应迟滞时间；

d_2——$n+1$ 车的制动距离；

d_3——n 车的制动距离；

L——停车安全距离 + 车体长。

线性跟驰模型

$$x_n(t) - x_{n+1}(t) = T\dot{x}_{n+1}(t+T) + L_0$$

两边对 t 微分：

$$\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t) = T\ddot{x}_{n+1}(t+T)$$

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{1}{T}[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

其中 $\ddot{x}_{n+1}(t+T)$ 表示后车在时刻 $t+T$ 的加速度，理解为后车的反应；$\frac{1}{T}$ 表示司机反应敏感度；$\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)$ 表示时刻 t 的刺激
从而认为：**反应** $=$ **敏感度** $\times$ **刺激**

线性跟驰模型

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{1}{T}[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

上述公式的推导是基于三点假设

- 前车刹车
- 前车、后车的减速距离相等 $d_2 = d_3$
- 后车在反应时间保持车速不变，$d_1 = T\dot{x}_{n+1}(t) = T\dot{x}_{n+1}(t+T)$

缺陷

- 缺陷：后车反应只依赖于它与前导车的速度差，而与两车间距及后随车本身的速度无关
- 事实上：两车间距愈小，尾撞危险越大；后车速度越高，一旦尾撞事故越严重，要求反应越迅速有效。

更一般化的结论

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \alpha\frac{[\dot{x}_{n+1}(t+T)]^m}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^l}[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

线性跟驰模型的解释

驾驶员反应 $(T+t)$ =灵敏度 $(\lambda)\times$ 驾驶员接受的刺激 (t)

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T)=\lambda\times\left[\dot{x}_n(t)-\dot{x}_{n+1}(t)\right]$$

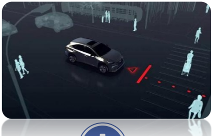
灵敏度	驾驶员对刺激的反应系数，量纲是 1/s
刺激	引导车加、减速引起的两车速度差或车间距变化
反应	驾驶员根据引导车的状态对后车进行操纵及效果

线性跟驰模型的应用

- 提供车头间距、相对速度等信息，帮助驾驶员跟随车辆，防止追尾事故的发生
- 分析公共汽车单车道流量预测小型汽车对市内交通的影响
- 通过模拟车队的跟驰状态，研究车辆跟驰运行中的安全性

移动互联与智能驾驶对跟驰特性的改变

- **移动互联与智能驾驶技术主要从以下几方面改变车辆跟驰特性:**



扩大车辆感知范围，增加感知信息

减少人工驾驶任务，避免驾驶失误

更短的车头时距，提高交通效率

更快的反应时间，提高交通安全

更稳定的运行状态，减少交通排放

本节目录

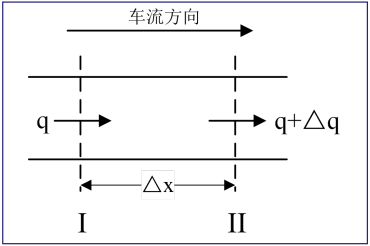
交通波模型

运用流体力学的基本原理，模拟流体的连续性方程，建立车流的连续性方程。把密度很大的交通流看作流体，把车流密度的变化抽象为车流波，通过分析车流波的传播速度，寻求交通流流量和速度、密度之间的关系，描述车流的拥挤——消散过程

流体流与交通流的比较

物理意义	流体特性	交通流特性	物理意义	流体特性	交通流特性
离散元素	流体分子	车辆	变量	流速v	车速v
运动方向	一向性	单向		压力P	流量Q
连续体形态	可压缩或不可压缩流体	不可压缩交通流	动量	Mv	Kv
变量	质量(密度)m	密度K	状态方程	P=cmT	Q=Kv

车流连续方程



假设车流顺次通过断面 I 和 II 的时间间隔为 Δt，两断面的间距为 Δx。同时，车流在断面 I 的流入量为 q，密度为 k。车流在断面 II 的流出量为 $(q+\Delta q)$，密度为 $(k-\Delta k)$。Δk 取负号表示在拥挤状态，车流密度随车流率的增加而减少

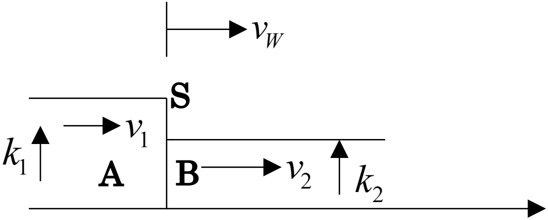
流入量-流出量 = 数量上的变化

$$[q-(q+\Delta q)]\Delta t = [k-(k-\Delta k)]\Delta x$$

当 $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$，得到守恒方程

$$\frac{\Delta k}{\Delta t} + \frac{\Delta q}{\Delta x} = 0$$

交通波模型的建立



假设一条公路上有两个相邻的不同交通流密度区域（k_1 和 k_2），用垂直线 S 分割这两种密度，称 S 为波阵面, 设 S 的速度为 v_w，并规定交通流按照图中箭头 x 正方向运行。其中 v_1 为在 A 区车辆的区间平均速度；v_2 为 B 区车辆的区间平均速度

波传递的速度

$$v_W = \frac{q_2 - q_1}{k_2 - k_1}$$

代入 Greenshields 的线性模型（$v_i = v_f(1 - \frac{k_i}{k_j})$），令 $\eta_i = \frac{k_i}{k_j}$ 可得

$$v_W = v_f[1 - (\eta_1 + \eta_2)]$$

其中 k_j 为阻塞密度，η 为标准化密度，v_f 为自由流密度

停车波

假定：车流的标准化密度为 η_1 以区间平均速度 v_1 行驶，在交叉口遇到红灯停，此时 $\eta_2 = 1$ 。

$$v_W = v_f[1 - (\eta_1 + 1)] = -v_f\eta_1$$

说明：停车而产生的波，以 $v_f\eta_1$ 的速度向后方传播，低密向高密集结

起动波

当车辆起动时 $k_1 = k_j$，也即 $\eta_1 = 1$

$$v_W = v_f[1-(\eta_2+1)] = -v_f\eta_2 = -(v_f - v_2)$$

说明：排队等待的车辆从一开始起动，就产生了起动波，该波以接近 v_f 的速度向后传播，高密向低密消散

应用示例

例

车流在一条 6 车道的公路上畅通通行驶，其速度为 v =80km/h。路上有四座 4 车道的桥，每车道的通行能力为 1940 辆/h，高峰时单向车流量为 4200 辆/h，在过渡段的车速降至 22km/h，这样持续了 1.69h，然后车流量将减到 1956 辆/h，试估计桥前的车辆排队长度和阻塞时间。

解

计算排队长度

1. 在能畅通行驶的车道里没有阻塞现象, 其密度为 $k_1 = \frac{q_1}{v_1} = \frac{4200}{80} = 53$辆/km
2. 过渡段, 由于该处只能通过 1940*2=3880 辆/h，而现在却需要通过 4200 辆/h, 因此会出现拥挤, 其密度为 $k_2 = \frac{q_2}{v_2} = \frac{3880}{22} = 177$辆/km
3. 交通波传播速度 $v_W = \frac{q_2 - q_1}{k_2 - k_1} = \frac{3880-4200}{177-53} = 2.58$km/h 。表明此处出现迫使排队的反向波, 波速为 2.58km/h, 注意到波速由 0 经过了 1.69h 增加到 2.58km/h, 其平均波速为 $v_a = (0 + 2.58)/2 = 1.29$km/h，所以此处排队长度为 $L = v_a \times t = 1.29 \times 1.69 = 2.18$km

应用示例

解（续）

计算阻塞时间：高峰过去后，排队即开始消散，但阻塞仍要持续一段时间，因此阻塞时间为排队形成时间与消散时间之和

1. 排队消散时间 t' 已知高峰后的车流量：$q_3<3880$ 辆/h，表明通行能力已经富余，排队开始消散
   车队车辆数为 $(q_1-q_2)\times 1.69=(4200-3880)\times 1.69=541$ 辆
   车队消散能力为:$q_3-q_2=1956-3880=-1924$ 辆/h
   则排队消散时间 $t'=\frac{(q_1-q_2)\times 1.69}{|q_3-q_2|}=\frac{541}{1924}=0.28\text{h}$
2. 阻塞时间 $t=t'+1.69=1.97\text{h}$

课下训练

- 王炜等. 第 4 章
- Mannering&Washburn. Chapter 5

谢谢!